

# 知识不确定性度量及其关系研究

刘财辉<sup>1,2</sup> 苗夺谦<sup>2</sup> 岳晓冬<sup>3</sup> 赵才荣<sup>2</sup>

(赣南师范学院数学与计算机科学学院 赣州 341000)<sup>1</sup> (同济大学计算机科学与技术系 上海 201804)<sup>2</sup>  
(上海大学计算机工程与科学学院 上海 200444)<sup>3</sup>

**摘 要** 知识的不确定性度量研究是人工智能领域的一个热点问题。在回顾几种经典知识不确定性度量方法的基础上,系统研究了这些度量方法之间的联系与区别,结果表明信息粒度等度量与知识粒度是等价的,而 Rough 熵和协同熵等则可看作是信息熵的派生,并通过实例验证了结论的正确性。

**关键词** 度量,不确定性,粗糙集,信息熵

中图法分类号 TP301.6 文献标识码 A

## Measures of Uncertainty of Knowledge and their Relationships

LIU Cai-hui<sup>1,2</sup> MIAO Duo-qian<sup>2</sup> YUE Xiao-dong<sup>3</sup> ZHAO Cai-rong<sup>2</sup>

(Department of Mathematics & Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou 341000, China)<sup>1</sup>

(Department of Computer Science and Technology, Tongji University, Shanghai 201804, China)<sup>2</sup>

(School of Computer Engineering and Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)<sup>3</sup>

**Abstract** Measures of uncertainty of knowledge are hot topics in the area of artificial intelligence. This paper studied systemically the interrelationships of classical measures of uncertainty of knowledge in rough set theory. The outputs show that information granularity is equivalent to knowledge granularity, whereas, rough entropy and co-entropy can be derived from information entropy. Two examples were employed to explain the results.

**Keywords** Measures, Uncertainty, Rough sets, Information entropy

在粗糙集中,知识被看作是对论域的一种划分能力。由于知识自身具有粒度,使得知识具有不确定性。与其它方法(如统计方法、模糊集方法)相比,粗糙集方法以知识的颗粒状为主要特征来表示知识的不确定性,试图为不确定性知识的表示、度量和应用等奠定有效的数学基础。知识的不确定性度量方法一直是人们关注的热点。从代数角度, Pawlak<sup>[1,2]</sup>利用粗糙集的上、下近似,给出了近似精度与粗糙度的概念,用它们来刻画粗糙集的不确定性;苗等<sup>[3]</sup>提出了知识粒度的概念,并分析了相关性;Qian等<sup>[4,5]</sup>则通过将二元关系表示成邻域系统的形式,提出了知识的信息粒度、组合粒度、互补熵等度量方法。鉴于熵是信息度量的良好工具,国内外许多学者从信息熵角度对知识不确定性度量问题进行了系统的研究与探讨。苗<sup>[6]</sup>于1997年将信息论引入粗糙集理论中,开创了知识的信息表示与信息度量的研究,提出了知识的信息熵、条件熵和互信息等概念,讨论了知识粗糙性(知识的不确定性)与信息熵之间的关系;王等<sup>[7]</sup>提出了评价知识度量的准则,并证明了苗提出的信息熵知识度量的正确性和可行性;Düntsch等<sup>[8]</sup>于1998年运用 Shannon 熵对粗糙集理论中的规则进行度量,并指出信息熵是寻找任意元素等价类信息最

小平平均计算量的度量;基于 Shannon 熵的拓展形式, Beaubouef等<sup>[9]</sup>研究了粗糙集和粗糙关系数据库中的不确定性信息度量;Wierman<sup>[10]</sup>从集合论的角度讨论了粗糙集中知识的不确定性,于1999年提出了“Granularity”的概念,从本质上看 Granularity 与苗提出的信息熵是等价的;Liang等<sup>[11]</sup>提出了 Rough 熵等方法来对知识的不确定性进行度量。本文分别从代数和信息论两个角度出发对知识的不确定性进行了系统研究,对已有知识不确定性度量方法进行了归纳总结,深入探讨了几种经典度量方法的联系与区别。

## 1 基本概念

### 1.1 粗糙度、粗糙熵

**定义 1**<sup>[1,2]</sup> 给定知识库  $K=(U, \mathbf{R})$ , 对于任意子集  $X \subseteq U$  和  $U$  上的等价关系  $R$ ,  $X$  的粗糙度定义为

$$\rho_R(X) = 1 - \frac{R(X)}{R(X)} = \frac{BND(X)}{R(X)}$$

从定义 1 容易得到  $0 \leq \rho_R(X) \leq 1$ 。特别地当  $\rho_R(X) = 0$  时,表示在已有知识  $R$  下,概念  $X$  是完全清晰的;当  $\rho_R(X) = 1$  时,表示根据知识  $R$ ,概念  $X$  完全不清楚。

到稿日期:2013-05-15 返修日期:2013-07-06 本文受国家自然科学基金项目(61103067, 61273304, 61305052),赣南师范学院校级课题(10kyz03)资助。

刘财辉(1979—),男,博士,副教授,主要研究方向为粗糙集、粒计算、机器学习等, E-mail: liu\_caihui@163.com;苗夺谦(1964—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为粗糙集、粒计算、机器学习等;岳晓冬(1980—),男,博士后,讲师,主要研究方向为数据挖掘和多媒体等;赵才荣(1981—),男,博士后。

**定义 2<sup>[9]</sup>** 设  $K=(U, \mathbf{R})$  是一知识库,  $P \in \mathbf{R}$  是定义在  $U$  上的等价关系,  $P$  在  $U$  上导出的划分为  $U/IND(P) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , 则  $X \subseteq U$  在知识  $P$  下的粗糙熵定义为

$$E_r(X) = -\rho_P(X) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} \log \frac{1}{|X_i|}$$

## 1.2 知识粒度

在粗糙集理论中, 知识是论域  $U$  上的等价关系。因此, 一个拥有知识  $R$  的智能体 (agent, 如人、机器人等) 不能将  $u \in U$  与  $[u]_R$  (包含  $u$  的等价类) 中的对象区分开来, 而只能区分不同等价类中的对象。根据这一思想, 苗等<sup>[3]</sup> 提出了知识粒度的概念并研究了相关性质。

**定义 3<sup>[3]</sup>** 设  $K=(U, \mathbf{R})$  是一个知识库,  $R \in \mathbf{R}$  为论域  $U$  上的等价关系, 称为知识。知识  $R \in \mathbf{R}$  的粒度, 记为  $GD(R)$ , 定义为

$$GD(R) = \frac{|R|}{|U \times U|} = \frac{|R|}{|U|^2}$$

其中,  $|R|$  表示  $R \subseteq U \times U$  的基数。

若  $U/R = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , 则有  $GD(R) = \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|^2}{|U|^2}$ 。

知识  $R$  的粒度可以表示它的分辨能力, 对任意  $u, v \in U$ , 当  $(u, v) \in R$  时, 表明对象  $u, v$  在  $R$  下不可分辨, 属于  $R$  的同一个等价类; 否则, 它们可分辨, 属于不同的  $R$ -等价类。因此,  $GD(R)$  表示在  $U$  中随机选择两个对象, 这两个对象的  $R$ -不可分辨的可能性大小。可能性越大, 即  $GD(R)$  越大, 则表明  $R$  的分辨能力越弱; 否则越强。因此, 自然有如下定义。

**定义 4<sup>[3]</sup>** 定义知识  $R$  的分辨度  $Dis(R)$  为

$$Dis(R) = 1 - GD(R) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|^2}{|U|^2}$$

分辨度的大小直接反映知识的分辨能力。

## 1.3 信息粒度、组合粒度、互补熵

Qian 等<sup>[4,5]</sup> 通过将二元关系表示成邻域系统, 使得由二元关系诱导的粒空间有统一的表示形式, 并在此基础上提出了知识的信息粒度、组合粒度、互补熵等度量方法。

为了后面讨论的方便, 记  $K(P) = \{N_p(x), x \in U\}$ , 表示由  $P \in \mathbf{R}$  所诱导的粒空间, 其中  $N_p(x)$  是对象  $x \in U$  关于  $P$  的邻域。

**定义 5<sup>[4]</sup>** 设  $K=(U, \mathbf{R})$  是一个知识库, 对任意给定的二元关系  $P \in \mathbf{R}$ , 其诱导的粒空间为  $K(P) = \{N_p(x_1), N_p(x_2), \dots, N_p(x_{|U|})\}$ , 则知识  $P$  的信息粒度定义为

$$G(P) = \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{|N_p(x_i)|}{|U|}$$

其中,  $\frac{|N_p(x_i)|}{|U|}$  是邻域  $N_p(x_i)$  在  $U$  中所占的比例。

**定义 6<sup>[5]</sup>** 设  $K=(U, \mathbf{R})$  是一个知识库, 对任意给定的二元关系  $P \in \mathbf{R}$ , 其诱导的粒空间为  $K(P) = \{N_p(x_1), N_p(x_2), \dots, N_p(x_{|U|})\}$ , 则知识  $P$  的组合粒度定义为

$$CG(P) = \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{C_{|N_p(x_i)|}^2}{C_{|U|}^2}$$

其中,  $\frac{C_{|N_p(x_i)|}^2}{C_{|U|}^2}$  是邻域  $N_p(x_i)$  中的元素对 (object pair) 在论域  $U$  中的所有元素对中所占的比例,  $C_{|N_p(x_i)|}^2 =$

$$\frac{|N_p(x_i)|(|N_p(x_i)|-1)}{2}$$

**定义 7<sup>[4]</sup>** 设  $K=(U, \mathbf{R})$  是一个知识库,  $P \in \mathbf{R}$  是  $U$  上的一个等价关系, 其在  $U$  上的划分为  $U/IND(P) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ , 则知识  $P$  的互补熵定义为

$$IE(P) = \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|}{|U|} \frac{|X_i^c|}{|U|}$$

其中,  $X_i^c$  表示  $X_i$  的补集。

## 1.4 信息熵、Rough 熵、协同熵

**定义 8<sup>[6]</sup>** 给定知识库  $K=(U, \mathbf{R})$ ,  $P \in \mathbf{R}$ ,  $P$  在  $U$  上导出的划分为  $U/IND(P) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , 则知识  $P$  的熵  $H(P)$  可定义为

$$H(P) = -\sum_{i=1}^n p(X_i) \log_2 p(X_i)$$

**定义 9<sup>[12]</sup>** 给定知识库  $K=(U, \mathbf{R})$ ,  $P \in \mathbf{R}$ ,  $P$  在  $U$  上导出的划分为  $U/IND(P) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , 则知识  $P$  的 Rough 熵  $E(P)$  定义为

$$E(P) = -\sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} \log_2 \frac{1}{|X_i|}$$

**定义 10<sup>[13]</sup>** 给定知识库  $K=(U, \mathbf{R})$ ,  $P \in \mathbf{R}$ ,  $P$  在  $U$  上导出的划分为  $U/IND(P) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , 则知识  $P$  的协同熵  $CE(P)$  定义为

$$CE(P) = \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^n |X_i| \log_2 |X_i|$$

## 2 知识度量之间的关系

### 2.1 信息粒度、组合粒度等与知识粒度的关系

Yao 等<sup>[11]</sup> 给出了知识系统中粒度度量的一般性公理化定义, 这为人们构建新的粒度度量方法和比较已有知识粒度度量方法提供了有力的工具。前面分别介绍了知识粒度、信息粒度、组合粒度及互补熵等度量知识粒度的工具, 这一小节将讨论这些度量工具之间的联系与区别。

**定义 11<sup>[11]</sup>** 设有知识库  $K=(U, \mathbf{R})$ , 若对任意的  $P \in \mathbf{R}$ , 存在一个实数  $GK(P)$  满足:

(1) 非负性:  $GK(P) \geq 0$ ;

(2) 粒度不变性: 对任意  $P, Q \in \mathbf{R}$ , 若  $P \equiv Q$ , 有  $GK(P) = GK(Q)$ ;

(3) 单调性: 对于任意  $P, Q \in \mathbf{R}$ , 若  $P < Q$ , 有  $GK(P) < GK(Q)$ ;

则称  $GK(P)$  为知识库  $K=(U, \mathbf{R})$  上的知识粒度。

**定理 1** 知识粒度  $GD(P)$  是满足定义 11 的一个度量。

证明: (1) 根据定义 3, 显然有  $GD(P) \geq 0$ ;

(2) 任意给定  $P, Q \in \mathbf{R}$ , 假设  $P, Q$  为:

$$U/IND(P) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$$

$$U/IND(Q) = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$$

若  $P \equiv Q$ , 根据定义, 存在一个双射  $f: P \rightarrow Q$ , 使得对任意的  $X_i \in U/IND(P)$ , 有  $|X_i| = |f(X_i)| = |Y_j|$ 。因而, 有

$$GD(P) = \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|^2}{|U|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{|Y_i|^2}{|U|^2} = GD(Q)$$

(3) 任意给定  $P, Q \in \mathbf{R}$ , 若  $P < Q$ , 根据定义有: 对任意的  $X_i \in U/IND(P)$ , 总存在  $Y_j \in U/IND(Q)$ , 使得  $X_i \subset Y_j$  成立, 也即有  $|X_i| \leq |Y_j|$ , 因此有:

$$GD(P) = \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|^2}{|U|^2} < \sum_{j=1}^n \frac{|Y_j|^2}{|U|^2} = GD(Q)$$

综上,定义 3 给出的知识粒度是定义 11 意义下的一个知识粒度。

**定理 2** 信息粒度  $G(P)$ 也是满足定义 11 的一个度量。

证明:(1)根据定义 5,显然有  $G(P) \geq 0$ ;

(2)任意给定  $P, Q \in \mathbf{R}$ ,假设  $P, Q$  为:

$$K(P) = \{N_P(x_1), N_P(x_2), \dots, N_P(x_{|U|})\}$$

$$K(Q) = \{N_Q(x_1), N_Q(x_2), \dots, N_Q(x_{|U|})\}$$

若  $P=Q$ ,根据定义,有  $|N_P(x_i)| = |N_Q(x_i)|, 1 \leq i \leq |U|$ ,

因此有:

$$G(P) = \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{|N_P(x_i)|}{|U|} = \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{|N_Q(x_i)|}{|U|} = G(Q)$$

(3)任意给定  $P, Q \in \mathbf{R}$ ,若  $P < Q$ ,则  $|N_P(x_i)| < |N_Q(x_i)|,$

$1 \leq i \leq |U|$ ,因此有:

$$G(P) = \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{|N_P(x_i)|}{|U|} < \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{|N_Q(x_i)|}{|U|} = G(Q)$$

**定理 3** 设  $K=(U, \mathbf{R})$ 是一知识库,若给定  $P \in \mathbf{R}$ 是一等价关系,则信息粒度  $G(P)$ 与知识粒度  $GD(P)$ 等价。

证明:若对  $P \in \mathbf{R}, U/IND(P) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ ,而  $K(P) = \{N_P(x_1), N_P(x_2), \dots, N_P(x_{|U|})\}, X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots,$

$x_{is_i}\}$ ,其中  $|X_i| = s_i, \sum_{i=1}^m s_i = |U|$ ,则有

$$X_i = N_P(x_{i1}) = N_P(x_{i2}) = \dots = N_P(x_{is_i})$$

由定义 5 有

$$\begin{aligned} G(P) &= \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{|N_P(x_i)|}{|U|} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{|U|} \left( \frac{|N_P(x_{i1})|}{|U|} + \frac{|N_P(x_{i2})|}{|U|} + \dots + \frac{|N_P(x_{is_i})|}{|U|} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{|U|} \left( \frac{|X_i|}{|U|} + \frac{|X_i|}{|U|} + \dots + \frac{|X_i|}{|U|} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|^2}{|U|^2} = GD(P) \end{aligned}$$

从定理 3 可以看到,信息粒度是从元素邻域的角度出发定义的,而知识粒度则是由等价关系直接诱导出的,二者本质上是完全等价的,区别在于二者看问题的角度不同。这里需要指出的是在非等价关系诱导的近似空间下,信息粒度可以看作是知识粒度的一种自然拓展。

**定理 4** 组合粒度  $CG(P)$ 是知识粒度  $GD(P)$ 的一种变异形式。

证明:给定  $P \in \mathbf{R}, U/IND(P) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ ,且有  $K(P) = \{N_P(x_1), N_P(x_2), \dots, N_P(x_{|U|})\}, X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots,$

$x_{is_i}\}$ ,其中  $|X_i| = s_i, \sum_{i=1}^m s_i = |U|$ ,显然有

$$X_i = N_P(x_{i1}) = N_P(x_{i2}) = \dots = N_P(x_{is_i})$$

则根据定义 3 和定理 3 有

$$GD(P) = \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|^2}{|U|^2} = \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{|N_P(x_i)|}{|U|}$$

$|X_i|^2$  表示等价类中所有元素对的个数,也即  $|\{(x_t, x_s) | x_t, x_s \in X_i\}|$ ,其中既包括  $(x_t, x_t)$ ,也同时包括  $(x_t, x_s)$  和  $(x_s, x_t)$ 。

而根据定义 6 有

$$\begin{aligned} CG(P) &= \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{C_{|N_P(x_i)|}^2}{C_{|U|}^2} \\ &= \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{\frac{|N_P(x_i)|(|N_P(x_i)|-1)}{2}}{\frac{|U|(|U|-1)}{2}} \\ &= \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{|N_P(x_i)|(|N_P(x_i)|-1)}{|U|(|U|-1)} \end{aligned}$$

其中不包括  $(x_t, x_t)$ ,同时  $(x_t, x_s)$  和  $(x_s, x_t)$  只计算其中之一。

综上,组合粒度  $CG(P)$ 是知识粒度  $GD(P)$ 的一种变异形式。

**定理 5** 互补熵  $IE(P)$ 和分辨率  $Dis(R)$ 等价,而  $IE(P)$ 和知识粒度  $GD(R)$ 互补。

证明:假设  $U/IND(P) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ ,根据定义 7 有

$$\begin{aligned} IE(P) &= \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|}{|U|} \frac{|X_i|}{|U|} = \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|}{|U|} \left(1 - \frac{|X_i|}{|U|}\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|}{|U|} - \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|^2}{|U|^2} = 1 - \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|^2}{|U|^2} \\ &= 1 - GD(R) = Dis(R) \end{aligned}$$

上述知识粒度度量之间的联系与区别可总结为图 1。

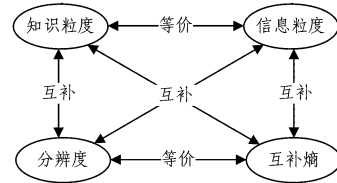


图 1 知识粒度度量的关系

下面的例子说明了知识粒度、分辨率、信息粒度及互补熵的关系。

例 1 设给定一个有关天气的完备信息表(见表 1),其中  $U = \{1, 2, \dots, 14\}$ ,属性集为  $\{\text{Outlook, Temperature, Humidity, Windy}\}$ 。

表 1 天气信息表

U	Outlook	Temperature	Humidity	Windy
1	Sunny	Hot	High	False
2	Sunny	Hot	High	True
3	Overcast	Hot	High	False
4	Rain	Mild	High	False
5	Rain	Cool	Normal	False
6	Rain	Cool	Normal	True
7	Overcast	Cool	Normal	True
8	Sunny	Mild	High	False
9	Sunny	Cool	Normal	False
10	Rain	Mild	Normal	False
11	Sunny	Mild	Normal	True
12	Overcast	Mild	High	True
13	Overcast	Hot	Normal	False
14	Rain	Mild	High	True

设  $P$  代表“Outlook”,则有  $U/P = \{\{1, 2, 8, 9, 11\}, \{3, 7, 12, 13\}, \{4, 5, 6, 10, 14\}\}$ ,根据定义,有如下结果:

(1)知识粒度:

$$GD(P) = \sum_{i=1}^m \frac{|X_i|^2}{|U|^2} = \frac{5^2}{14^2} + \frac{4^2}{14^2} + \frac{5^2}{14^2} = \frac{33}{98}$$

(2)信息粒度:

$$G(P) = \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^{|U|} \frac{|N_P(x_i)|}{|U|}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{14} \times \left( \underbrace{\frac{5}{14} + \dots + \frac{5}{14}}_5 + \underbrace{\frac{4}{14} + \dots + \frac{4}{14}}_4 \right) + \\
&\quad \frac{5}{14} + \dots + \frac{5}{14} \\
&= \frac{1}{14} \times \left( \frac{5^2}{14} + \frac{4^2}{14} + \frac{5^2}{14} \right) = \frac{33}{98}
\end{aligned}$$

(3) 分辨率:

$$Dis(R) = 1 - GD(R) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|^2}{|U|^2} = 1 - \frac{33}{98} = \frac{65}{98}$$

(4) 互补熵:

$$\begin{aligned}
IE(P) &= \sum_{i=1}^m \frac{|X_i| |X_i^c|}{|U|} \\
&= \frac{5}{14} \times \frac{14-5}{14} + \frac{4}{14} \times \frac{14-4}{14} + \frac{5}{14} \times \frac{14-5}{14} = \frac{65}{98}
\end{aligned}$$

综合上述计算结果,有

(I)  $GD(P) = G(P)$ , 即知识  $P$  的知识粒度与  $P$  的信息粒度相等;

(II)  $Dis(P) = IE(P)$ , 即知识  $P$  的分辨率与  $P$  的互补熵相等;

(III)  $GD(P) = 1 - IE(P)$ , 即知识  $P$  的知识粒度与  $P$  的互补熵是互补关系;

(IV)  $G(P) = 1 - Dis(P)$ , 即知识  $P$  的信息粒度与  $P$  的分辨率是互补关系。

## 2.2 信息熵与其它知识粗糙性度量工具的关系

这一小节将讨论粗糙熵、Rough 熵以及协同熵 (Co-entropy) 与信息熵的联系与区别。下面先对信息熵进行分析,由定义 8 有

$$\begin{aligned}
H(P) &= - \sum_{i=1}^n p(X_i) \log_2 p(X_i) \\
&= - \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} \log_2 \frac{|X_i|}{|U|} \\
&= \log_2 U - \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} \log_2 |X_i|
\end{aligned}$$

其中,  $H(P)$  的前半部分  $\log_2 U$  是 Hartley 熵, 当  $U$  给定时,  $\log_2 U$  是一常数。为了后面讨论的方便, 记  $GM(P) = \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} \log_2 |X_i|$ 。

**定理 6** 粗糙熵是  $GM(P)$  与粗糙度  $\rho_P(X)$  相乘的结果。

证明: 由定义 1 和 2 及  $GM(P)$  可以直接得到。

**定理 7** Rough 熵  $E(P)$  和协同熵  $CE(P)$  均等价于  $GM(P)$ 。

证明: 由定义 9 有

$$\begin{aligned}
E(P) &= - \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} \log_2 \frac{1}{|X_i|} \\
&= - \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} (\log_2 1 - \log_2 |X_i|) = \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} \log_2 |X_i| \\
&= GM(P)
\end{aligned}$$

由定义 10 有

$$\begin{aligned}
CE(P) &= \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^n |X_i| \log_2 |X_i| \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} \log_2 |X_i| = GM(P)
\end{aligned}$$

上述知识粗糙性度量之间的关系可总结为图 2。

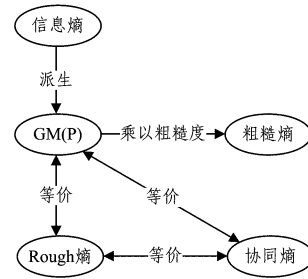


图 2 知识粗糙性度量的关系

下面的例子说明了信息熵、Rough 熵及协同熵之间的关系。

例 2(续例 1) 仍设  $P$  代表“Outlook”, 则有  $U/P = \{\{1, 2, 8, 9, 11\}, \{3, 7, 12, 13\}, \{4, 5, 6, 10, 14\}\}$ , 根据定义, 有如下结果:

$$\begin{aligned}
(1) GM(P) &= \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} \log_2 |X_i| \\
&= \frac{5}{14} \log_2 5 + \frac{4}{14} \log_2 4 + \frac{5}{14} \log_2 5 \approx 2.230
\end{aligned}$$

(2) Rough 熵:

$$\begin{aligned}
E(P) &= - \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{|U|} \log_2 \frac{1}{|X_i|} \\
&= - \left( \frac{5}{14} \log_2 \frac{1}{5} + \frac{4}{14} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{5}{14} \log_2 \frac{1}{5} \right) \approx 2.230
\end{aligned}$$

(3) 协同熵:

$$\begin{aligned}
CE(P) &= \frac{1}{|U|} \sum_{i=1}^n |X_i| \log_2 |X_i| = \frac{1}{14} (5 \log_2 5 + 4 \log_2 4 + \\
&\quad 5 \log_2 5) \approx 2.230
\end{aligned}$$

综合上述计算结果,有

(I)  $GM(P) = E(P)$ , 即知识  $P$  的 Rough 熵与  $GM(P)$  相等;

(II)  $GM(P) = CE(P)$ , 即知识  $P$  的协同熵与  $GM(P)$  相等;

(III)  $E(P) = CE(P)$ , 即知识  $P$  的 Rough 熵与  $P$  的协同熵相等。

**结束语** 本文对几种知识的不确定性度量进行了深入分析与探讨。研究表明信息粒度、互补熵等度量与知识粒度是等价的, 只是各自研究问题的角度不同; Rough 熵和协同熵则可以看作是信息熵的派生, 因为它们与信息熵的可变部分等价。

## 参考文献

- [1] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Information and Computer Sciences, 1982, 11: 341-356
- [2] Pawlak Z. Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991
- [3] 苗夺谦, 范世栋. 知识的粒度计算及其应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2002(1): 48-56
- [4] Qian Yu-hua, Liang Ji-ye, Dang Chuang-yin. Knowledge structure, know-ledge granulation and knowledge distance in a knowledge base [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2009, 50(1): 174-188
- [5] Qian Yu-hua, Liang Ji-ye. Combination entropy and combination granulation in rough set theory [J]. International Journal of Un-

certainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008, 16(2):179-193

- [6] 苗夺谦. Rough Set 理论及其在机器学习中的应用研究[D]. 北京:中国科学院自动化研究所, 1997
- [7] 王瑜, 胡运发, 张凯. 基于粗集理论的知识含量度量研究[J]. 计算机研究与发展, 2004, 41(9):1500-1506
- [8] Düntsch I, Gediga G. Uncertainty measure of rough set prediction [J]. Artificial Intelligence, 1998, 106:109-137
- [9] Beaubouef T, Petry F E. Fuzzy rough set techniques for uncertainty processing in a relational database [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2000, 15(5):389-424
- [10] Wierman M J. Measuring Uncertainty in Rough set theory [J].

International Journal of General Systems, 1999, 28(4/5):283-297

- [11] Yao Yi-yu, Zhao Li-quan. A measurement theory view on the granularity of partitions [J]. Information Sciences, 2012, 213:1-13
- [12] Liang Ji-ye, Shi Zhong-zhi. The information entropy, rough entropy and knowledge granulation in rough set theory [J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2004, 12(1):37-46
- [13] Bianucci D, Cattaneo G, Ciucci D. Entropies and co-entropies of coverings with application to incomplete information systems [J]. Fundamenta Informaticae, 2007, 75(1):77-105

(上接第 49 页)

从表 2 中可以看出朴素贝叶斯的识别率优于其它 3 个模式识别方法。

### 5.1.2 车道线检测

对 4 幅不同的光照的车道图像运用本文的算法进行检测, 车道线的检测结果用黄线进行标记。图 10 为传统方法检测结果, 图 11 为本文方法检测结果。可以看出, 本文的方法能够更好地检测车道两旁的车道线。



图 10 传统方法检测结果

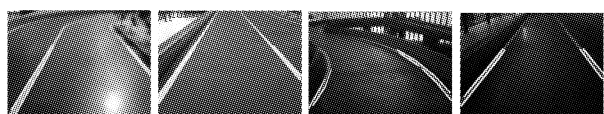


图 11 本文方法检测结果

对测试集中的 270 幅图像采用本文方法检测车道两侧的车道线, 只要发现有一侧的车道线出现偏离或者误检测车道线, 则认为检测失败。本文方法的正确率为 95.5%。误检测主要发生在图像抖动较为剧烈时, 也即车道线模型参数变化较大时, 而这种抖动主要是缩微智能车在拐角较大时产生的震动所致。

### 5.2 动态实验

本文方法应用于缩微智能交通系统, 缩微智能车根据车道线检测结果实现自动驾驶。其中软件平台是: Linux 操作系统, G++ 编译器, OpenCV 计算机视觉库。硬件平台是: X86 主板, 1.00GB 内存。

缩微智能车系统主控板与缩微智能车舵机控制模块的数据交互周期为 50ms, 车道线检测平均时间为 31ms, 能够满足缩微智能车在不同光照条件下的车道线检测, 缩微智能车的行驶速度可以达到 1m/s。

**结束语** 本文根据缩微道路环境的特点, 提出一种基于朴素贝叶斯缩微道路光照模式分类和车道线检测相结合的方法, 以解决光照变化对缩微道路环境下车道线检测的影响。先在 PC 机上对该方法进行检测, 然后通过缩微智能车自动驾驶验证本文方法的可行性、高效性和稳定性。这为缩微智能车的研究奠定了基础。

## 参考文献

- [1] Wang Guo-yin, Chen Qiao-song, Wang Jin. Discussion on the Intelligent Vehicle Technologies [J]. Computer Science, 2012, 39(5):1-8
- [2] Lakhoyia A, Golconda S, Maida A, et al. CajunBot: Architecture and Algorithms [M]. Springer Tracts in Advanced Robotics, 2007, 36:245-280
- [3] Bruce J, Balch T, Veloso M. Fast and Inexpensive Color Image Segmentation for Interactive Robots [J]. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2000(10):2061-2066
- [4] Ji Xue-jiao. Vision-based Autonomous Driving in Miniature Traffic Environment [D]. Beijing: Tsinghua University, 2011
- [5] Ma Yu-lin, Yan Xin-ping, Wu qing. Research on Intelligent Vehicle Platoon Driving Simulation Experiment System under the Coordination between Vehicle and Highway [J]. Journal of Computers, 2010, 5(11):1767-1768
- [6] Chu Wei-dong, Wang Guo-yi, Wang Jin. Lane Detection in Micro-Traffic Environment [J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2012, 6(10):921-926
- [7] Zhao Jia-jia. The Design of Illumination Classifier for Lanes [D]. Jilin: Jilin University, 2007
- [8] Huang Zhi-kai, Liu De-hui. Segmentation of Color Image Using EM algorithm in HSV Color Space [C] // Proceedings of the 2007 International Conference on Information Acquisition, 2007. Jeju, Korea, 2007:316-319
- [9] Bradski G, Kaebler A. Learning OpenCV Computer Vision with the OpenCV Library [M]. O'Reilly Media, 2008
- [10] 贾永红. 计算机图像处理与分析 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2001
- [11] Otsu N. A threshold selection method from gray-level histogram. IEEE Transactions on Systems [J]. Man and Cybernetics, 1979, 9(1):62-66
- [12] Wang Zhi, He Sai-xian. An Adaptive Edge-detection Method Based on Canny Algorithm [J]. Journal of Image and Graphics, 2004, 9(8):957-961
- [13] Galamhos C, Matas J, Kittler J. Progressive Probabilistic Hough Transform for line detection [C] // Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition, 1999:23-25
- [14] <http://cs.cqupt.edu.cn/MemberReadNews.asp?NewsID=113-99&SpecialID=0>